

Stufenmässige Anordnung

des

trigonometrischen Lehrstoffs

der

Gymnasien.

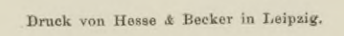
Nebst einer Figurentafel.

Von

Dr. F. Conradt,
Oberlehrer am Gymnasium zu Belgard.

Ostern 1889,
Gustav Fock in Leipzig.

1889. Progr. No. 121.



Druck von Hesse & Becker in Leipzig.

Erste Stufe.

(Obersekunda.)

§ 1. Rechtwinklige Koordinaten eines Punktes.

Um die Lage eines Punktes in der Ebene unzweideutig zu bestimmen, bedient man sich der Methode der Koordinaten. Man nimmt nämlich an, dass die Lage von zwei aufeinander senkrechten Geraden XX' und YY' gegeben ist, die sich in O durchschneiden (Fig. 1). Ist dann P_1 irgend ein Punkt in der Ebene dieser Geraden, so sind durch seine Lage die Längen der von ihm auf XX' und YY' gefällten Lote gegeben, und umgekehrt kann man aus den bekannten Längen von P_1M und P_1N die Lage des Punktes P_1 bestimmen. Nimmt man z. B. an, es sei $P_1N = a$ und $P_1M = b$ gegeben, so hat man $OM = a$ auf XX' und $ON = b$ auf YY' abzutragen und auf XX' in M, sowie auf YY' in N die Lote zu errichten, die sich alsdann in P_1 durchschneiden. Die Lote P_1M und P_1N werden die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P_1 genannt und zwar insbesondere P_1M seine Ordinate, P_1N seine Abscisse. Man kann auch ON als Ordinate und OM als Abscisse von P_1 bezeichnen. Die festen Geraden XX' und YY' werden als die Koordinatenaxen und zwar XX' als Abscissenaxe, YY' als Ordinatenaxe bezeichnet. Der Durchschnittspunkt O beider Koordinatenaxen heisst der Anfangspunkt der Koordinaten. Welches sind die Koordinaten der Punkte M_1, N_1, O?

Wenn es sich um die Aufgabe handelt, einen Punkt zu zeichnen, dessen Ordinate b und dessen Abscisse a ist, so würde nach dem bisherigen die Aufgabe vier Lösungen haben, nämlich P_1, P_2, P_3, P_4, da man ja a und b nach beiden Seiten von O abtragen könnte. Es ist aber möglich, zwischen den Strecken OM und OM', ON und ON', welche der Länge nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, algebraisch zu unterscheiden, indem man ihnen verschiedene Vorzeichen beilegt. Wir setzen fest, dass Strecken, die, nach einer bestimmten Richtung gemessen, als positiv betrachtet werden, als negativ gelten, wenn sie nach der entgegengesetzten Richtung gemessen werden. Welche Richtung einer Linie als positiv, welche als negativ betrachtet werden soll, ist willkürlich; es

ist aber üblich, die nach rechts gemessenen Abschnitte der Abscissenaxe und die nach oben gemessenen Abschnitte der Ordinatenaxe als positiv zu betrachten. Doch kann man natürlich auch anders bestimmen (vgl. §§ 7 und 11). Es sind demnach OM und ON als positiv, OM' und ON' als negativ zu betrachten. Welches sind danach die Koordinaten der Punkte P_2, P_3, P_4?

§ 2. Sinus und Cosinus.

Wir schlagen (Fig. 2) einen Kreis um den Koordinatenanfang, dessen Radius im Folgenden als Längenmass für Strecken (Längeneinheit) dienen soll. Der Kreis schneide die Abscissenaxe in A und A', die Ordinatenaxe in B und B'. Als Masseinheit für die Bogen dieses Kreises nehmen wir den 360. Teil der Peripherie, welcher Grad (°) genannt wird. Der Grad wird entweder in 60 Minuten (′) und die Minute in 60 Sekunden (″) eingeteilt oder man bedient sich auch der Dezimalteile des Grades. Der 100. Teil desselben heisst auch Centigrad. Als Anfangspunkt der Bogen nehmen wir seinen Durchschnittspunkt mit der positiven Richtung der Abscissenaxe, A, und nehmen als positive Richtung der Bogen die von A aus nach der positiven Richtung der Ordinatenaxe zu gehende, als negative die entgegengesetzte. Dann ist die Lage des Punktes P_1 auf der Peripherie des Kreises bestimmt durch seine Ordinate ON und seine Abscisse OM. Man nennt ON den Sinus und OM den Cosinus des Bogens AP_1 und man bedient sich, wenn der Bogen $AP_1 = \alpha$ gesetzt wird, der Bezeichnungen

$$ON = \sin \alpha, \quad OM = \cos \alpha.$$

Unter dem Sinus eines Bogens versteht man die Ordinate und unter dem Cosinus desselben die Abscisse seines Endpunktes. Statt Sinus und Cosinus des Bogens AP_1 sagt man auch Sinus und Cosinus des Winkels AOP_1.

Welches sind die Sinus und Cosinus der Bogen AP_2, AP_3, AP_4?

§ 3. Verlauf des Sinus.

Wir denken uns einen beweglichen Punkt P, der von A ausgehend in der Richtung über B (also linksdrehend) die Peripherie des Kreises durchläuft und von welchem in jeder Lage die Lote auf die Koordinatenaxen gefällt werden. Durchläuft der Punkt P den Quadranten AB, so durchläuft der Punkt N die Strecke OB, d. h. im ersten Quadranten ändert sich der Sinus des Bogens AP von 0 bis 1. Durchläuft der Punkt P den Quadranten BA', so durchläuft N die Strecke BO, d. h. im zweiten Quadranten ändert sich der Sinus von 1 bis 0. Durchläuft der Punkt P den Quadranten $A'B'$, so durchläuft N die Strecke OB',

d. h. im dritten Quadranten ändert sich der Sinus von 0 bis — 1. Durchläuft der Punkt P den Quadranten $B'A$, so durchläuft N die Strecke $B'O$, d. h. im vierten Quadranten ändert sich der Sinus von — 1 bis 0.

Der Sinus ist positiv im ersten und zweiten, negativ im dritten und vierten Quadranten; er wächst im ersten und vierten, fällt im zweiten und dritten Quadranten.

$$\sin 0^0 = 0,\ \sin 90^0 = 1,\ \sin 180^0 = \pm 0,\ \sin 270^0 = -1,\ \sin 360^0 = \mp 0.$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha.$$
$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin \alpha.$$
$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin \alpha.$$

Bogen, die sich zu 180⁰ ergänzen, heissen Supplemente.

Der Sinus eines Bogens ist also gleich dem Sinus seines Supplements.

Anmerkung. Das Zeichen $\pm$ soll andeuten, dass der Sinus sein Zeichen an der betreffenden Stelle ändert, indem er vom Positiven ins Negative übergeht; das Zeichen $\mp$, dass er ebenso vom Negativen ins Positive übergeht.

§ 4. Verlauf des Cosinus.

Wir betrachten den beweglichen Punkt P von neuem. Durchläuft derselbe den Quadranten AB, so durchläuft der Punkt M die Strecke AO, d. h. im ersten Quadranten ändert sich der Cosinus des Bogens AP von 1 bis 0. Durchläuft der Punkt P den Quadranten BA', so durchläuft M die Strecke OA', d. h. im zweiten Quadranten ändert sich der Cosinus von 0 bis — 1. Durchläuft P den Quadranten $A'B'$, so durchläuft M die Strecke $A'O$, d. h. im dritten Quadranten ändert sich der Cosinus von — 1 bis 0. Durchläuft der Punkt P den Quadranten $B'A$, so durchläuft M die Strecke OA, d. h. im vierten Quadranten ändert sich der Cosinus von 0 bis 1.

Der Cosinus ist positiv im ersten und vierten, negativ im zweiten und dritten Quadranten; er wächst im dritten und vierten, fällt im ersten und zweiten Quadranten.

$$\cos 0^0 = 1,\ \cos 90^0 = \pm 0,\ \cos 180^0 = -1,\ \cos 270^0 = \mp 0,\ \cos 360^0 = 1.$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha,$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos \alpha,$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = \cos \alpha.$$

Der Cosinus eines Bogens ist gleich dem negativ genommenen Cosinus seines Supplements.

Anmerkung. Durchläuft P die Peripherie mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so durchlaufen M und N die Durchmesser AA' und BB' mit veränderlicher Geschwindigkeit. Die Sinus und Cosinus sind also den Bogen nicht (direkt oder umgekehrt) proportional.

§ 5. Beliebige und negative Bogen.

Setzt der bewegliche Punkt P, nachdem er die Peripherie des Kreises einmal durchlaufen hat, seine Bewegung weiter fort, so erhält man Bogen, die bis in den fünften, sechsten u. s. w. Quadranten reichen. Offenbar fallen die Sinus und Cosinus dieser Bogen mit den Sinus und Cosinus der Bogen des ersten, zweiten u. s. w. Quadranten zusammen und man hat, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\sin(n \cdot 360^0 + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(n \cdot 360^0 + \alpha) = \cos \alpha.$$

Bewegt sich der Punkt P von A aus über B' (also rechtsdrehend), so erhält man als negativ zu betrachtende Bogen. Es ist

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin(-n \cdot 360^0 - \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-n \cdot 360^0 - \alpha) = \cos \alpha.$$

§ 6. Funktionen.

Sind zwei Grössen so miteinander verbunden, dass jedem Werte der einen ein ganz bestimmter Wert (oder auch mehrere Werte) der andern entspricht, so heisst die zweite Grösse eine Funktion der ersten. Hat man z. B. $y = x^2$, so entspricht jedem Werte von x ein ganz bestimmter Wert von y, mithin ist y eine Funktion von x. Dieselbe Beziehung gilt für x und y, wenn z. B.

$$y = 2x + 3 \text{ oder } y = \sqrt{3x^2 - 1}$$

u. s. w. ist. Diese Abhängigkeit einer Grösse, der Funktion, von einer andern, die man die unabhängige Veränderliche oder auch bloss die Veränderliche nennt, braucht nicht in entwickelter Form ausgedrückt zu sein. Aber der Funktionsbegriff ist noch allgemeiner; er kann auch da hervortreten, wo man nicht im stande ist, das Gesetz der Abhängigkeit in mathematischer Form wiederzugeben. So weiss man z. B., dass die Spannung des gesättigten Wasserdampfes von seiner Temperatur in der Weise abhängig ist, dass man nach Beobachtungen und nach auf Grund derselben angefertigten Tafeln für jede Temperatur des Dampfes seine Spannung angeben kann. Trotz des Fehlens eines mathematischen Ausdrucks für diese Abhängigkeit ist man berechtigt, die Spannung als Funktion der Temperatur zu bezeichnen.

Nimmt man als unabhängige Veränderliche den von A ausgehenden Bogen der vorigen Paragraphen, so erkennt man, dass der Sinus und der Cosinus Funktionen dieses Bogens sind. Man nennt sie Kreisfunktionen, weil sie am Kreise vorkommen oder auch trigonometrische Funktionen, weil sie als Hilfsmittel zur Berechnung der Dreiecke Verwendung finden.

§ 7. Komplemente.

Wir vertauschen die Bedeutung der Koordinatenaxen, indem wir annehmen, dass unter Beibehaltung ihrer positiv und negativ genommenen Richtungen XX' die Ordinatenaxe, YY' die Abscissenaxe darstelle. Dann ist B als Anfangspunkt der Bogen zu nehmen und ein beweglicher Punkt P muss sich, um positive Bogen zu beschreiben, nach A zu (also rechtsdrehend) bewegen. Bezeichnen wir den Bogen BP_1 mit β, so ist

$$OM = NP_1 = \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$ON = MP_1 = \cos\beta = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha.$$

Bogen, die sich zu 90^0 ergänzen, heissen Komplemente.

Der Sinus eines Bogens ist gleich dem Cosinus seines Komplements und umgekehrt.

(Die Beziehungen zwischen den Funktionen von Komplementen lassen sich leicht behalten, wenn man sich merkt, dass Cosinus = complementi sinus.)

Da $90^0 + \alpha$ das Supplement von $90^0 - \alpha$ ist, hat man noch die Beziehungen

$$\sin(90^0 + \alpha) = \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Anmerkung. Die §§ 3, 4, 5, 7 ermöglichen es, die Sinus und Cosinus beliebiger Bogen auf Funktionen von Bogen unter 45^0 zurückzuführen.

§ 8. Erste Grundformel.

In dem Dreieck OMP_1 ist

$$MP_1^2 + OM^2 = 1,$$

d. i.

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1,$$

wofür man auch schreibt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ebenso ergiebt sich aus den Dreiecken $OM'P_2$, $OM'P_3$, OMP_4, da für die Quadrate der negativ zu nehmenden Strecken die Quadrate ihrer absoluten Beträge genommen werden können,

$$\sin^2(180^0 - \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha) = 1,$$
$$\sin^2(180^0 + \alpha) + \cos^2(180^0 + \alpha) = 1,$$
$$\sin^2(360^0 - \alpha) + \cos^2(360^0 - \alpha) = 1.$$

Mithin ist allgemein

$$1) \quad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

wo φ irgend einen positiven oder negativen Bogen bezeichnet.

(Erste Grundformel der Trigonometrie.)

Hieraus ergiebt sich

$$2) \quad \sin\varphi = \pm\sqrt{1 - \cos^2\varphi}.$$
$$3) \quad \cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi}.$$

In 2) ist das Pluszeichen zu nehmen, wenn φ dem ersten oder zweiten, das Minuszeichen, wenn φ dem dritten oder vierten Quadranten angehört. In 3) ist das Pluszeichen zu nehmen, wenn φ dem ersten oder vierten, das Minuszeichen, wenn φ dem zweiten oder dritten Quadranten angehört.

Die Formeln 2) und 3) können dazu dienen, aus dem bekannten Cosinus oder Sinus eines Bogens den Sinus oder Cosinus desselben durch Rechnung zu finden. So ist z. B., wie sich leicht aus der Figur ergiebt,

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2},$$

mithin

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Nach dem Früheren ist auch

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2}, \ \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Ferner ist $\sin 45^0 = \cos 45^0$, mithin nach 1)

$$\sin^2 45^0 + \sin^2 45^0 = 1,$$

woraus

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Ist $\varphi = 18^0$, so ist der zugehörige Sinus die halbe Seite des regelmässigen Zehnecks im Kreise, mithin

$$\sin 18^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

woraus

$$\cos 18^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Nach dem Früheren ist auch

$$\sin 72^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \ \cos 72^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

§ 9. Die Tangente.

Wir legen (Fig. 3) in A die (geometrische) Tangente an den Kreis, dessen Radius der Längeneinheit gleich ist, und betrachten diejenigen von A aus gemessenen Abschnitte derselben als positiv, bez. negativ, die mit den positiven, bez. negativen Ordinaten gleich gerichtet sind. Ist dann U der Durchschnittspunkt des Radius OP_1 mit dieser Linie, so ist AU ebenfalls eine Funktion des Bogens AP_1 und heisst seine (trigonometrische) Tangente. Man bedient sich, wenn Bogen $AP_1 = \alpha$ ist, der Bezeichnung

$$AU = \operatorname{tg} \alpha.$$

Unter der (trigonometrischen) Tangente eines Bogens versteht man den Abschnitt, welchen der nach seinem Endpunkte gehende Radius auf derjenigen geometrischen Tangente bildet, die den Kreis im Durchschnitt mit dem positiven Teile der Abscissenaxe berührt.

Wir denken uns nun einen Punkt P, der von A aus im positiven Sinne die Peripherie des Kreises beschreibt. Durchläuft der Punkt P den ersten Quadranten,

so durchläuft U von A aus den ganzen positiven Teil der geometrischen Tangente, d. h. im ersten Quadranten ändert sich die trigonometrische Tangente von 0 bi ∞. Für 90^0 ist der Radius OP parallel der geometrischen Tangente, der Durchschnittspunkt U ist in das Unendliche gerückt, tg 90^0 also grösser als jede angebbare Zahl. Bei einer Weiterbewegung des Punktes P bewegt sich der Durchschnittspunkt U auf dem negativen Teile der geometrischen Tangente vom Unendlichen her nach A zu. Mithin ist $\operatorname{tg} 90^0 = \pm \infty$, d. h. bei 90^0 geht die Tangente von positiven zu negativen Werten durch das Unendliche über und ändert sich im zweiten Quadranten von $-\infty$ bis 0. Im dritten Quadranten ändert sich die Tangente wieder von 0 bis $+\infty$ und im vierten Quadranten von $-\infty$ bis 0.

Die Tangente ist also positiv im ersten und dritten, negativ im zweiten und vierten Quadranten; sie wächst in allen Quadranten und ist unstetig bei 90^0 und 270^0.

$$\operatorname{tg} 0 = 0,\ \operatorname{tg} 90^0 = \pm \infty,\ \operatorname{tg} 180^0 = \mp 0,\ \operatorname{tg} 270^0 = \pm \infty,\ \operatorname{tg} 360^0 = \mp 0.$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = 1,\ \operatorname{tg} 135^0 = -1,\ \operatorname{tg} 225^0 = 1,\ \operatorname{tg} 315^0 = -1.$$

$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Die Tangente eines Bogens ist gleich der negativ genommenen Tangente seines Supplements.

$$\operatorname{tg}(n \cdot 180^0 + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(n \cdot 180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$tg(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Ferner ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OAU und OMP_1, OAU' und $OM'P_2$, OAU und $OM'P_3$, OAU' und OMP_4

$$\frac{AU}{OA} = \frac{MP_1}{OM},\quad \frac{AU'}{OA} = \frac{M'P_2}{OM'},\quad \frac{AU}{OA} = \frac{M'P_3}{OM'},\quad \frac{AU'}{OA} = \frac{MP_4}{OM}.$$

Die Vorderglieder und die Hinterglieder jedes dieser Verhältnisse sind gleichzeitig entweder gleich oder entgegengesetzt gerichtet; mithin ist auch dem Vorzeichen nach (wenn man den Nenner 1 fortlässt)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},\quad \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\cos(180^0 - \alpha)},$$

$$\operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \frac{\sin(180^0 + \alpha)}{\cos(180^0 + \alpha)},\quad \operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = \frac{\sin(360^0 - \alpha)}{\cos(360^0 - \alpha)}$$

oder allgemein

1) $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

wo φ irgend einen positiven oder negativen Bogen bezeichnet.

(Zweite Grundformel der Trigonometrie.)

Mit Zuhilfenahme der ersten Grundformel hat man noch

$$2)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$$

$$3)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi},$$

wo das Vorzeichen nach § 8 zu bestimmen ist.

Mit Hilfe der Formel 2) kann man aus dem Sinus oder Cosinus eines Bogens die Tangente desselben finden; z. B.

$$\operatorname{tg}30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}18^0 = \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg}72^0 = \frac{\sin 72^0}{\cos 72^0} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Handelt es sich um die Aufgabe, aus $\operatorname{tg}\alpha$ als gegebener Funktion $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ zu finden, so hat man die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

nach $\sin\alpha$, bez. $\cos\alpha$ aufzulösen; man erhält

$$4)\qquad \sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad 5)\qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

worin das Vorzeichen nach § 3, bez. 4 zu bestimmen ist.

§ 10. **Die Cotangente.**

Wir legen (Fig. 4) in B die (geometrische) Tangente an den Kreis, dessen Radius der Längeneinheit gleich ist, und betrachten diejenigen von B aus gemessenen Abschnitte derselben als positiv, bez. negativ, die mit den positiven, bez. negativen Abscissen gleich gerichtet sind. Ist V der Durchschnittspunkt des Radius OP_1 mit dieser Linie, so ist BV ebenfalls eine Funktion des Bogens AP_1 und heisst seine Cotangente, und man bedient sich der Bezeichnung

$$BV = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Unter der Cotangente eines Bogens versteht man den Abschnitt, welchen der nach seinem Endpunkte gehende Radius auf derjenigen

geometrischen Tangente bildet, die den Kreis im Durchschnittspunkt mit der positiven Ordinatenaxe berührt.

Fällt der Punkt P mit A zusammen, so ist der nach ihm gehende Radius der geometrischen Tangente im Punkte B parallel, der Durchschnittspunkt V liegt im Unendlichen, ctg 0^0 ist grösser als jede angebbare Zahl. Durchläuft P den ersten Quadranten, so bewegt sich V auf dem positiven Teile der geometrischen Tangente vom Unendlichen her nach B zu; die Cotangente ändert sich also im ersten Quadranten von ∞ bis 0. Durchläuft P den zweiten Quadranten, so bewegt sich V von B aus auf dem negativen Teile der geometrischen Tangente und durchläuft die Werte von 0 bis $-\infty$. Bei 180^0 geht die Cotangente von negativen zu positiven Werten durch das Unendliche über, d. h. $\operatorname{ctg} 180^0 = \mp \infty$. Im dritten Quadranten ändert sich die Cotangente wieder von $+\infty$ bis 0 und im vierten von 0 bis $-\infty$.

Die Cotangente ist also positiv im ersten und dritten, negativ im zweiten und vierten Quadranten; sie hat demnach mit der Tangente stets gleiche Zeichen. Sie fällt in allen Quadranten und ist unstetig bei 180^0 und 360^0.

$$\operatorname{ctg} 0 = \infty,\ \operatorname{ctg} 90^0 = \pm 0,\ \operatorname{ctg} 180^0 = \mp \infty,\ \operatorname{ctg} 270^0 = \pm 0,\ \operatorname{ctg} 360^0 = \mp \infty.$$

$$\operatorname{ctg} 45^0 = 1,\ \operatorname{ctg} 135^0 = -1,\ \operatorname{ctg} 225^0 = 1,\ \operatorname{ctg} 315 = -1.$$

$$\operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Die Cotangente eines Bogens ist gleich der negativ genommenen Cotangente ihres Supplements.

$$\operatorname{ctg}(n \cdot 180^0 + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(n \cdot 180^0 - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ferner ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OBV und ONP_1, OBV' und ONP_2, OBV und $ON'P_3$, OBV' und $ON'P_4$

$$\frac{BV}{OB} = \frac{NP_1}{ON},\quad \frac{BV'}{OB} = \frac{NP_2}{ON},\quad \frac{BV}{OB} = \frac{N'P_3}{ON'},\quad \frac{BV'}{OB} = \frac{N'P_4}{ON'}.$$

Auch hier sind die Vorder- und die Hinterglieder jedes Verhältnisses gleichzeitig entweder gleich oder entgegengesetzt gerichtet, mithin

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) = \frac{\cos(180^0 - \alpha)}{\sin(180^0 - \alpha)},$$

$$\operatorname{ctg}(180^0 + \alpha) = \frac{\cos(180^0 + \alpha)}{\sin(180^0 + \alpha)},\quad \operatorname{ctg}(360^0 - \alpha) = \frac{\cos(360^0 - \alpha)}{\sin(360^0 - \alpha)}$$

oder allgemein

$$1)\qquad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

wo φ irgend einen positiven oder negativen Bogen bezeichnet.

(Dritte Grundformel der Trigonometrie.)

Mit Zuhilfenahme der ersten Grundformel hat man noch

$$2)\qquad \operatorname{ctg}\varphi = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

$$3)\qquad \operatorname{ctg}\varphi = \pm\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}},$$

wo das Vorzeichen nach § 8 zu bestimmen ist.

Mit Hilfe der Formel 2) kann man aus Cosinus und Sinus eines Bogens die Cotangente desselben finden, z. B.

$$\operatorname{ctg}30^0 = \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}60^0 = \frac{\cos 60^0}{\sin 60^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}18^0 = \frac{\cos 18^0}{\sin 18^0} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{ctg}72^0 = \frac{\cos 72^0}{\sin 72^0} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

Handelt es sich um die Aufgabe, aus $\operatorname{ctg}\alpha$ als gegebener Funktion $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu finden, so hat man die Gleichungen

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \quad\text{und}\quad \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$

nach $\sin\alpha$, bez. $\cos\alpha$ aufzulösen und erhält

$$4)\qquad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \qquad 5)\qquad \cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},$$

worin das Vorzeichen nach § 3, bez. 4 zu bestimmen ist.

§ 11. Beziehungen zwischen Tangente und Cotangente.

Aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad\text{und}\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Tangente und Cotangente desselben Bogens sind also in Bezug auf einander umgekehrte Werte; steht die Tangente eines Bogens im Nenner eines Bruches, so kann man dafür die Cotangente desselben Bogens in den Zähler setzen und umgekehrt.

Wir vertauschen jetzt wie in § 7 die Bedeutung der Koordinatenaxen, so dass wieder B der Anfangspunkt der Bogen wird und der bewegliche Punkt P sich von B rechtsdrehend nach A bewegt. Wird dann wieder der Bogen BP_1 mit β bezeichnet, so ist (Fig. 5)

$$BV = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$AU = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Tangente eines Bogens ist gleich der Cotangente seines Komplements.

Ausserdem hat man noch die Beziehungen

$$\operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Anmerkung. Nach den §§ 9, 10, 11 lassen sich auch die Tangenten und Cotangenten beliebiger Bogen auf Funktionen von Bogen unter 45^0 zurückführen.

§ 12. **Zur Wiederholung. Trigonometrische Tafeln.**

1. In der nachfolgenden Tafel sind die Vorzeichen der Funktionen in den einzelnen Quadranten zusammengestellt.

	I	II	III	IV
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
ctg	+	—	+	—

2. In der nachfolgenden Tafel sind die Werte der Funktionen an den Grenzen der einzelnen Quadranten zusammengestellt.

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	1	± 0	-1	∓ 0
cos	1	± 0	-1	∓ 0	1
tg	0	$\pm\infty$	∓ 0	$\pm\infty$	∓ 0
ctg	∞	± 0	$\mp\infty$	± 0	$\mp\infty$

3. Ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, was insbesondere der Fall ist, wenn α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind, so ist

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma,\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma,$$

mithin

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma,$	$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\frac{1}{2}\gamma$
$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma,$	$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\frac{1}{2}\gamma$
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = -\mathrm{tg}\,\gamma,$	$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \mathrm{ctg}\frac{1}{2}\gamma$
$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = -\mathrm{ctg}\,\gamma.$	$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma.$

4. Man hat besondere Tafeln für die Werte der behandelten vier trigonometrischen Funktionen berechnet; da jedoch gewöhnlich die Funktionswerte selbst nicht gebraucht werden, sondern nur ihre Logarithmen, so beschränken sich die für die Benutzung beim praktischen Rechnen bestimmten Tafeln auf eine Zusammenstellung der Logarithmen dieser Funktionen. Nach §§ 7 und 11 lassen sich alle Funktionen auf Funktionen der Bogen von 0^0 bis 45^0 zurückführen, weshalb die trigonometrischen Tafeln auch nur diese Logarithmen zu enthalten brauchen. Eine Anleitung zur Benutzung der Tafeln findet sich in diesen selbst in ausreichender Weise, so dass hier davon abgesehen werden kann.

§ 13. Das rechtwinklige Dreieck.

Schlägt man (Fig. 6) mit der Hypotenuse AB eines bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC den Kreis um A, der AC in D schneidet, und nimmt in diesem Kreise die Hypotenuse als Masseinheit, D als Anfangspunkt der Bogen, so ist

$$BC = \sin\alpha,\ AC = \cos\alpha.$$

In einem rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse 1 ist eine Kathete der Sinus des ihr gegenüber liegenden und der Cosinus des ihr anliegenden Winkels.

Wir betrachten nun (Fig. 7) ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse von 1 verschieden ist. Es sei $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$.

Wir tragen die Längeneinheit auf AB von A aus bis B' ab und ziehen $B'C' \parallel BC$, so ist nach dem Obigen

$$B'C' = \sin\alpha,\quad AC' = \cos\alpha,$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'},\quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'},$$

d. i., wenn man den Nenner 1 fortlässt,

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha,\quad \frac{b}{c} = \cos\alpha.$$

Dividiert man die Gleichungen

$$1)\qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$2)\qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

durch einander, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a},$$

d. i.

$$3) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

$$4) \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist

1) der Sinus eines spitzen Winkels das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse,

2) der Cosinus eines spitzen Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse,

3) die Tangente eines spitzen Winkels das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden,

4) die Cotangente eines spitzen Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden.

Aus den Beziehungen 1) bis 4) ergiebt sich unter Hinzunahme der entsprechenden Beziehungen für $\measuredangle\beta$

$$a = c\sin\alpha, \qquad a = c\cos\beta,$$
$$b = c\cos\alpha, \qquad b = c\sin\beta,$$
$$a = b\operatorname{tg}\alpha, \qquad a = b\operatorname{ctg}\beta,$$
$$b = a\operatorname{ctg}\alpha, \qquad b = a\operatorname{tg}\beta.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen, denen man noch nach dem pythagoreischen Lehrsatze

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)},$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$$

hinzufügen kann, lassen sich alle besondern Fälle der Aufgabe:

Aus zwei Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden

auflösen, z. B.

I. Ist die Hypotenuse und ein spitzer Winkel (c und α) gegeben, so findet man

$$\beta = 90^0 - \alpha, \quad a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$

II. Ist eine Kathete und ein spitzer Winkel (a und α) gegeben, so findet man

$$\beta = 90^0 - \alpha, \quad b = a\operatorname{ctg}\alpha, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

III. Ist die Hypotenuse und eine Kathete (c und a) gegeben, so findet man

$$b = \sqrt{(c+a)(c-a)},\quad \sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \beta = 90^0 - \alpha.$$

IV. Sind die beiden Katheten (a und b) gegeben, so findet man

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \beta = 90^0 - \alpha.$$

Sind a und b vielziffrige Zahlen, so wird dieser Weg zu umständlich und man rechnet dann folgendermassen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \beta = 90^0 - \alpha,\quad c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

V. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist

$$F = \tfrac{1}{2}\, ab = \tfrac{1}{2}\, c^2 \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\, a^2 \operatorname{ctg}\alpha = \tfrac{1}{2}\, b\sqrt{c^2 - a^2}.$$

§ 14. **Das gleichschenklige Dreieck.**

Das gleichschenklige Dreieck wird durch die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, von denen 2 Stücke bekannt sind, wenn vom gleichschenkligen Dreiecke 2 Stücke gegeben sind. Hiernach lassen sich alle Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck auf Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck zurückführen. Ist a der Schenkel, c die Grundlinie, h die Höhe auf der Grundlinie, α der Winkel an der Grundlinie, γ der Winkel an der Spitze und F der Flächeninhalt, so ist zunächst zu beachten, dass durch einen der beiden Winkel auch der andere bekannt ist. Ist α gegeben, so ist $\gamma = 180^0 - 2\alpha$; ist γ gegeben, so ist $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$. Der Flächeninhalt ist zunächst

$$F = \tfrac{1}{2}\, ah.$$

Eine andere Formel für F erhält man, wenn man (Fig. 8) von A das Lot AD auf BC fällt; es ist nämlich

$$F = \tfrac{1}{2}\, BC \cdot AD.$$

Nun ergiebt sich aus $\triangle ACD$, dass

$$AD = AC \cdot \sin\gamma$$

ist; mithin ist

$$F = \tfrac{1}{2}\, a^2 \sin\gamma.$$

Aus den Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck mögen einige hervorgehoben werden.

I. Ist a und γ gegeben, so ist

$$c = 2a\sin\tfrac{1}{2}\gamma,\quad h = a\cos\tfrac{1}{2}\gamma,\quad F = \tfrac{1}{2}\, a^2\sin\gamma.$$

II. Ist c und α gegeben, so ist

$$a = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\alpha},\quad h = \tfrac{1}{2}\, c\operatorname{tg}\alpha,\quad F = \tfrac{1}{4}\, c^2\operatorname{tg}\alpha.$$

III. Ist a und c gegeben, so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\tfrac{1}{2}c}{a},\quad h = \sqrt{(a + \tfrac{1}{2}c)(a - \tfrac{1}{2}c)},\quad F = \tfrac{1}{2}c\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2}.$$

IV. Ist c und h gegeben, so ist

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + h^2},\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\tfrac{1}{2}c}{h},\quad F = \tfrac{1}{2}ch,$$

oder auch

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\tfrac{1}{2}c}{h},\quad a = \frac{\tfrac{1}{2}c}{\sin \tfrac{1}{2}\gamma},\quad F = \tfrac{1}{2}ch.$$

V. Ist F und γ gegeben, so ist

$$a = \sqrt{\frac{2F}{\sin\gamma}},\quad c = 2\sqrt{\frac{F}{\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\gamma}} = 2\sqrt{F \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma},\quad h = \sqrt{\frac{F}{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma}} = \sqrt{F\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\gamma}.$$

§ 15. Das regelmässige Vieleck.

Das regelmässige Vieleck von n Seiten wird durch die grossen Radien in n kongruente gleichschenklige Dreiecke (Bestimmungsdreiecke) zerlegt, wodurch Aufgaben über das regelmässige Vieleck auf Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck zurückgeführt werden. Der Winkel an der Spitze eines Bestimmungsdreiecks ist $\alpha = \frac{360^0}{n}$, lässt sich also aus der gegebenen Seitenzahl finden.

Ausserdem kommen in Betracht die Seite a, der Umfang $u = na$, der Flächeninhalt F, der grosse Radius r, der kleine Radius ϱ.

Aus den hier möglichen Aufgaben mögen einige hervorgehoben werden, wobei der Einfachheit wegen statt der Seitenzahl n gleich der Winkel α eingeführt ist.

I. Gegeben r und α; gesucht $F = \tfrac{1}{2}nr^2 \sin\alpha$.

II. Gegeben a und α; gesucht $F = \tfrac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha$.

III. Gegeben u und α; gesucht $F = \frac{1}{4n}u^2 \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha$.

IV. Gegeben ϱ und α; gesucht $F = n\varrho^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha$.

V. Gegeben F und α; gesucht

$$r = \sqrt{\frac{2F}{n\sin\alpha}},\quad a = \sqrt{\frac{4F}{n}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha},\quad u = \sqrt{4nF\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha},\quad \varrho = \sqrt{\frac{F}{n}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

§ 16. Der Kreis.

Hat in einem Kreise mit dem Radius r die zum Centriwinkel α gehörige Sehne a den Abstand d vom Mittelpunkte und ist b der zur Sehne gehörige kleinere Bogen des Kreises, S der zugehörige Sektor und Σ das zugehörige Segment, so ist

$$a = 2r\sin\tfrac{1}{2}\alpha,\quad d = r\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\quad b = \frac{r\pi\alpha}{180^0},\quad S = \frac{r^2\pi\alpha}{360^0},\quad \Sigma = \frac{r^2\pi\alpha}{360^0} - \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha.$$

Von den hier möglichen Aufgaben mögen einige hervorgehoben werden.

I. Aus dem Kreisradius r und einer Sehne den zu dieser gehörigen kleineren Bogen b des Kreises zu berechnen. (Man suche zunächst den Centriwinkel aus $\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{\frac{1}{2} a}{r}$, und dann den Bogen aus $b = \frac{r \pi \alpha}{180}$.)

II. Aus dem Kreisradius r und einem Bogen b die zu diesem gehörige Sehne a zu berechnen. (Man suche zunächst $\alpha = \frac{180\ b}{r \pi}$ und dann $a = 2r \sin \frac{1}{2} \alpha$.)

§ 17. Der Sinussatz.

Auch die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke aus 3 Begrenzungsstücken lässt sich auf die rechtwinkliger Dreiecke zurückführen. Hierzu sind jedoch noch einige Lehrsätze erforderlich, deren erster nunmehr abgeleitet werden soll. Im Folgenden werden die Seiten des Dreiecks nach den gegenüberliegenden Ecken mit a, b, c, ihre Gegenwinkel mit α, β, γ bezeichnet; sind a und b ungleich, so sei, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bestimmt wird, $a > b$. Im Dreieck ABC (Fig. 9) seien zunächst α und β spitze Winkel. Fällt man dann $CD \perp AB$, so ergiebt sich aus den Dreiecken CDB und CDA

$$CD = a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Ist α ein stumpfer Winkel, so sei α' sein spitzer Nebenwinkel und es ist

$$CD = a \sin \beta = b \sin \alpha' = b \sin \alpha.$$

Ist $\alpha = 90^0$, so ist $\sin \alpha = 1$; da aber in diesem Falle $a \sin \beta = b$ ist, so ist auch jetzt

$$a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Ebenso ist

$$a \sin \gamma = c \sin \alpha$$
$$b \sin \gamma = c \sin \beta.$$

Mithin gelten diese Gleichungen, die man auch schreiben kann

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

allgemein, d. h.

In jedem Dreiecke verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

(Sinussatz.)

Der Satz lässt sich auch schreiben

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks sind den Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel proportional.

Anmerkung. Da die Sinus den zugehörigen Bogen nicht proportional sind (vgl. § 4 Anm.), so verhalten sich die Seiten nicht wie die gegenüberliegenden Winkel, wie Anfänger auf Grund des Satzes von den Gegenwinkeln ungleicher Seiten anzunehmen geneigt sind.

§ 18. Anwendungen des Sinussatzes.

Der Sinussatz kann zur Berechnung eines Dreiecks benutzt werden, wenn von den 4 in ihm vorkommenden Stücken 3 gegeben sind. Da nun durch 2 Winkel eines Dreiecks auch der dritte gegeben ist, so kann der Sinussatz bei folgenden beiden Aufgaben angewandt werden:

1. Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln.
2. Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen.

I. Sind c, α, β gegeben, so findet man

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta), \quad a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

II. Sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gegeben, so ist zu unterscheiden, ob der Winkel der grösseren oder der kleineren Seite gegenüberliegt. Im erstern Falle giebt es nur ein Dreieck der verlangten Art; im letztern Falle kann die Aufgabe unlösbar sein oder eine oder zwei Lösungen haben (vgl. die entsprechende geometrische Konstruktion).

Es sei a, b, α gegeben, so findet man, wenn $a > b$ ist, β aus

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a},$$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta), \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Ist aber $a < b$, so liefert die Gleichung

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

keinen Wert für β, wenn $b \sin \alpha > a$ ist, einen Wert, wenn $b \sin \alpha = a$, zwe Werte, wenn $b \sin \alpha < a$ ist.

Ist $b \sin \alpha = a$, so ist $\sin \beta = 1$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 90^0 - \alpha$, $c = a \cos \beta$.

Ist $b \sin \alpha < a$, so ist, da β jetzt auch stumpf werden kann, für β nicht nur der spitze Winkel aus der Tafel zu entnehmen, sondern auch sein Supplementwinkel β' und die weitere Ausrechnung doppelt durchzuführen, also

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta), \quad \gamma' = 180^0 - (\alpha + \beta'),$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, \qquad c' = \frac{a \sin \gamma'}{\sin \alpha}.$$

§ 19. Der Tangentensatz und seine Anwendung.

Schlägt man (Fig. 10) mit der Seite CA des Dreiecks ABC den Kreis um C, der CB in D und E schneidet, so ist nach bekannten Sätzen der Planimetrie

$$\measuredangle EAD = 90^0, \measuredangle E = \tfrac{1}{2}\gamma, \measuredangle DAB = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

[Denn $\measuredangle CAD + CDA = CAB + CBA = \alpha + \beta$, also $\measuredangle CAD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $DAB = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$].

Zieht man nun $DF \parallel AE$, so stehen AE und DF senkrecht auf AD. Nun ist

$$\frac{BD}{BE} = \frac{DF}{EA} = \frac{AD \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{AD \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)},$$

d. i.

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Ebenso ist

$$\frac{c - b}{c + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma + \beta)}, \quad \frac{c - a}{c + a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)}.$$

In jedem Dreieck verhält sich die Differenz zweier Seiten zu ihrer Summe, wie die Tangente der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Summe derselben.
(Tangentensatz.*)

Der Tangentensatz kann zur Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel benutzt werden. Sind a, b und γ gegeben, so suche man zunächst $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$; dann findet man aus

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Aus $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ findet man dann α und β durch Addition und Subtraktion, endlich c nach dem Sinussatze.

Um aus a, b, γ den Flächeninhalt des Dreiecks zu finden, fälle man (Fig. 11) von A das Lot AD auf BC, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$F = \tfrac{1}{2} BC \cdot AD,$$

d. i., da $AD = b \sin \gamma$ (auch für ein bei C stumpfwinkliges oder rechtwinkliges Dreieck)

$$F = \tfrac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Ebenso

$$F = \tfrac{1}{2} ac \sin \beta.$$

$$F = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Anmerkung 1. Mit Hilfe des Tangentensatzes lässt sich auch ein Dreieck berechnen, von welchem a, b, $\alpha - \beta$ gegeben sind.

---

*) Natürlich hat man, wenn zwei Seiten gegeben sind, bei Anwendung des Satzes die grössere zum Minuendus zu machen.

Anmerkung 2. Will man den Flächeninhalt des Dreiecks durch eine Seite und die Winkel ausdrücken, so kann man in der obigen Formel nach dem Sinussatze noch

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

setzen, woraus man

$$F = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

und ebenso

$$F = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin \beta} \text{ und } F = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}$$

erhält.

§ 20. Der Flächeninhalt des Dreiecks aus seinen Seiten.

Um die letzte Aufgabe über das schiefwinklige Dreieck, die Berechnung der Winkel aus den Seiten, lösen zu können, ist es nötig, einige Ableitungen der rechnenden Geometrie einzuschalten. Es sollen zunächst die Projektionen p und q der Seiten a und b auf die Grundlinie c durch die Seiten des Dreiecks ausgedrückt werden. Es ist

$$p^2 = a^2 - h_c^2$$
$$q^2 = b^2 - h_c^2$$
$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2,$$
$$(p + q)(p - q) = a^2 - b^2.$$

Sind nun die Winkel an der Grundlinie spitz, so ist

$$p + q = c,$$
$$p - q = \frac{a^2 - b^2}{c},$$
$$p = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \quad q = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$

Ist $\measuredangle A$ stumpf, so gelten, wenn man festsetzt, dass in diesem Falle q einen negativen Wert hat, diese Formeln ebenfalls.

Nunmehr ist es leicht, mit Hilfe der Gleichung

$$h_c^2 = a^2 - p^2 = (a + p)(a - p)$$

h_c und dann F zu berechnen. Es ist

$$a + p = a + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2c}$$
$$= \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2c},$$

$$a - p = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2c} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2c}$$
$$= \frac{(b + a - c)(b - a + c)}{2c},$$

$$h_c^2 = (a + p)(a - p) = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$a + b + c = 2s,$$

so ist

$$-a + b + c = 2(s-a),$$
$$a - b + c = 2(s-b),$$
$$a + b - c = 2(s-c),$$

mithin

$$h_c^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2},$$

woraus

$$\tfrac{1}{4} c^2 h_c^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$
$$\tfrac{1}{2} c h_c = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

d. i.

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§ 21. Der Inkreis des Dreiecks.

Verbindet man (Fig. 12) den Mittelpunkt O des Inkreises eines Dreiecks, dessen Radius ϱ sei, mit den Ecken, so zerfällt das Dreieck ABC in die drei Dreiecke OBC, OCA, OAB, deren Inhalte bezüglich $\frac{1}{2} a\varrho$, $\frac{1}{2} b\varrho$, $\frac{1}{2} c\varrho$ sind. Mithin ist

$$F = \tfrac{1}{2} a\varrho + \tfrac{1}{2} b\varrho + \tfrac{1}{2} c\varrho = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\varrho = s\varrho;$$

also

$$\varrho = \frac{F}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

oder

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Setzt man ferner $AE = AF = x$, $BF = BD = y$, $CD = CE = z$, so ist

$$y + z = a$$
$$x + z = b$$
$$x + y = c.$$

Addiert man diese Gleichungen und dividiert durch 2, so erhält man

$$x + y + z = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = s.$$

Subtrahiert man hiervon der Reihe nach die obigen drei Gleichungen, so ergiebt sich

$$x = s - a,$$
$$y = s - b,$$
$$z = s - c.$$

§ 22. Der Inkreissatz und seine Anwendung.

Da AO (Fig. 12) die Halbierungslinie des Winkels A, $OF = \varrho$, $AF = s - a$ ist, so ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a},$$

und ebenso
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \beta = \frac{\varrho}{s-b},$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho}{s-c}.$$

(Inkreissatz.)

Der Formeln der §§ 21 und 22 kann man sich bedienen, wenn es sich darum handelt, ein Dreieck zu berechnen, von welchem die drei Seiten gegeben sind.

Sind a, b, c gegeben, so bilde man zunächst s, $s-a$, $s-b$, $s-c$; dann suche man ϱ aus

1) $$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

dann die halben Winkel aus

2) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\varrho}{s-a}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \beta = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \gamma = \frac{\varrho}{s-c},$$

endlich
$$F = s\varrho.$$

Anmerkung. Da ϱ selbst nicht gesucht wird, genügt es $\log \varrho$ zu suchen und diesen Logarithmus in der weitern Rechnung zu verwenden.

Zweite Stufe.*)

(Unterprima.)

§ 23. Zweite Form des Sinussatzes.

Es sei (Fig. 13) M der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises, r sein Radius und $MD \perp AB$. Dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck $ADM \measuredangle AMD = \gamma$, wenn $\gamma < 90^0$ ist und $= 180^0 - \gamma$, wenn $\gamma > 90^0$ ist. Mithin ist, da $\sin (180^0 - \gamma) = \sin \gamma$ ist,

$$\tfrac{1}{2} c = r \sin \gamma,$$

also

$$c = 2r \sin \gamma.$$

Die Gleichung gilt auch, wenn $\gamma = 90^0$ ist, also allgemein.

Mithin ist

$$a = 2r \sin \alpha,$$
$$b = 2r \sin \beta,$$
$$c = 2r \sin \gamma,$$

oder

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$

(Zweite Form des Sinussatzes.)

§ 24. Die Inhaltsformeln des Dreiecks.

Da $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ ist, so hat man

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot 2r \sin \alpha \cdot 2r \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

oder

$$F = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Wir stellen jetzt die wichtigsten Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks zusammen.

1) $F = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$.
2) $F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ (§ 19).
3) $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (§ 20).
4) $F = s \cdot \varrho$ (§ 21).
5) $F = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ (§ 24).

---

*) In der zweiten und dritten Stufe haben aus Rücksicht auf den verfügbaren Raum bedeutende Kürzungen stattfinden müssen.

§ 25. Der Projektionssatz.

Fällt man im Dreieck ABC (Fig. 9) $CD \perp AB$, so ist, wenn A und B spitze Winkel sind,

$$AB = BD + AD,$$
$$BD = a \cos \beta, \; AD = b \cos \alpha,$$

mithin

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Ist $\measuredangle A$ stumpf, so möge sein Nebenwinkel α' heissen; dann ist $\cos \alpha' = -\cos \alpha$ und

$$AB = BD - AD,$$
$$BD = a \cos \beta, \; AD = b \cos \alpha',$$

mithin

$$c = a \cos \beta - b \cos \alpha' = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Ist $\measuredangle A = 90^0$, so ist $\cos \alpha = 0$ und

$$AB = a \cos \beta,$$

mithin

$$c = a \cos \beta = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Mithin hat man für jedes Dreieck

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

und analog

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$
$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha.$$

(Projektionssatz.*)

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen

$$a = 2r \sin \alpha, \; b = 2r \sin \beta, \; c = 2r \sin \gamma,$$

so erhält man, wenn man durch $2r$ dividiert,

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

wofür man sagen kann

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

eine Formel, deren Giltigkeit noch der Bedingung $\alpha + \beta < 180^0$ unterliegt.

§ 26. Erweiterung des Projektionssatzes.

Beschreibt man (Fig. 14) um das Dreieck ABC den Kreis und zieht $CC' \parallel AB$ bis zum Durchschnitte mit diesem Kreise, so erhält man ein Dreieck $C'CB$, auf das der Projektionssatz angewandt werden soll.

Es ist $BC = a$, $BC' = b$ und CC' werde mit d bezeichnet. Ferner ist

---

*) Weil $a \cos \beta$ und $b \cos \alpha$ die Projektionen von a und b auf c sind.

$\sphericalangle BCC' = CBA = \beta$, $\sphericalangle BC'C = 180^0 - BAC = 180^0 - \alpha$, $\sphericalangle CBC' = ABC' - ABC = \alpha - \beta$. Mithin ist

$$d = a \cos \beta + b \cos (180^0 - \alpha)$$

oder

$$d = a \cos \beta - b \cos \alpha$$

oder mit Benutzung des Sinussatzes, wenn man gleichzeitig durch $2r$ dividiert,

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

§ 27. Funktionen von Summen und Differenzen.

Die in §§ 25 und 26 hergeleiteten Formeln für den Sinus der Summe und der Differenz zweier Bogen, nämlich

$$1) \quad \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$2) \quad \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

sind für den Fall bewiesen, dass $\alpha + \beta < 180^0$ ist; die zweite gilt auch für den Fall $\alpha < \beta$.

Wir nehmen zunächst an, dass α und β spitze Winkel sind. Setzen wir dann $90^0 - \alpha$ statt α in die Gleichungen 2) und 1) ein, so ergiebt sich

$$\sin (90^0 - \alpha - \beta) = \sin (90^0 - \alpha) \cos \beta - \sin \beta \cos (90^0 - \alpha)$$

$$\sin (90^0 - \alpha + \beta) = \sin (90^0 - \alpha) \cos \beta + \sin \beta \cos (90^0 - \alpha),$$

d. i.

$$3) \quad \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$4) \quad \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Formel 3) gilt auch für den Fall, dass $\alpha + \beta > 90^0$ ist, denn in diesem Falle ist $\sin (90^0 - \alpha - \beta) = - \sin (\alpha + \beta - 90^0) = - [- \cos (\alpha + \beta)] = \cos (\alpha + \beta)$. Ebenso gilt Formel 4) auch für den Fall $\alpha < \beta$.

Die Formeln 1) bis 4), die bis jetzt für solche Winkel α und β bewiesen sind, die dem ersten Quadranten angehören, gelten allgemein. Um dies zu zeigen, kann man

$$\alpha = m \cdot 180^0 \pm \alpha',$$

$$\beta = n \cdot 180^0 \pm \beta'$$

setzen, wo α und β dem ersten Quadranten angehören und m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, und dann passend umformen. Ein Beispiel möge dies erläutern.

Gehört z. B. α dem dritten, β dem zweiten, $\alpha + \beta$ dem vierten Quadranten an, so ist

$$\alpha = 180^0 + \alpha', \ \beta = 180^0 - \beta',$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin (360^0 + \alpha' - \beta') = \sin (\alpha' - \beta') = \sin \alpha' \cos \beta' - \sin \beta' \cos \alpha'$$
$$= (- \sin \alpha) (- \cos \beta) - (+ \sin \beta) (- \cos \alpha) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Entsprechend kann man die Richtigkeit der Entwicklungen von $\sin (\alpha - \beta)$, $\cos (\alpha + \beta)$, $\cos (\alpha - \beta)$ darthun.

Ferner ist

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$, so erhält man

$$5)\quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$6)\quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}.$$

§ 28. Die Funktionen des doppelten und des halbierten Bogens.

Aus den Formeln 1), 3), 5), 6) des vorigen Paragraphen erhält man, wenn man $\beta = \alpha$ setzt,

$$1)\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$2)\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$3)\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$4)\quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

oder bei veränderter Bezeichnungsweise

$$1)\quad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

$$2)\quad \cos\alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha},$$

$$4)\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha}.$$

Die Formeln 2) lassen noch eine bemerkenswerte Umformung zu. Da

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \text{ und } 1 = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

ist, so erhält man durch Addition und Subtraktion dieser und der Gleichungen 2)

$$5)\quad 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \text{ und } 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$6)\quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \text{ und } 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Diese Gleichungen geben

$$2^a)\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \text{ und } \cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - 1,$$

$$2^b)\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ und } \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Auch ergiebt sich

$$5^a)\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \text{ und } \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}},$$

$$5^b)\quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \text{ und } \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

§ 29. Summe und Differenz zweier Funktionen.

Sind x und y beliebige Bogen, so ist

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Durch Addition und Subtraktion erhält man aus den beiden ersten Gleichungen

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x$$

und ebenso aus den beiden letzten Gleichungen

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y.$$

Setzt man nun $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, also $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, so gehen die letzten 4 Gleichungen über in

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$,

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Multipliziert man die letzte Gleichung mit -1, so heisst sie

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

§ 30. Erste Form des Cosinussatzes.

Nach §§ 23 und 25 ist

$$a \sin\beta = b \sin\alpha,$$
$$a \cos\beta = c - b \cos\alpha.$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert, so erhält man

$$a^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

d. i.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

und nach Analogie

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

(Erste Form des Cosinussatzes.)

In dieser Form kann der Cosinussatz dazu dienen, aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen. Sind nämlich a, b und γ gegeben, so ist

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Sind a und b vielziffrige Zahlen, so wird die direkte Berechnung von c nach dieser Formel logarithmisch unbequem.

Anmerkung. In dem zuletzt erwähnten Falle kann man durch Umformung brauchbarere Gestalten dieser Formel erhalten. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab\cos\gamma \\ &= (a+b)^2 - 2ab\,(1+\cos\gamma) \\ &= (a+b)^2 - 4ab\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma \\ &= (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{(a+b)^2}\right], \end{aligned}$$

also

$$c = (a+b)\sqrt{1 - \frac{4ab\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{(a+b)^2}};$$

oder auch

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab + 2ab - 2ab\cos\gamma \\ &= (a-b)^2 + 2ab\,(1-\cos\gamma) \\ &= (a-b)^2 + 4ab\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \\ &= (a-b)^2\left[1 + \frac{4ab\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{(a-b)^2}\right], \end{aligned}$$

also

$$c = (a-b)\sqrt{1 + \frac{4ab\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{(a-b)^2}}. \quad \text{(vgl. § 35, II.)}$$

§ 31. Zweite Form des Cosinussatzes.

Löst man die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

nach $\cos\alpha$ auf, so erhält man

$$1)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{und nach Analogie} \\ \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos\gamma = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{cases}$$

(Zweite Form des Cosinussatzes.)

In dieser Form kann der Cosinussatz dazu dienen, aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel zu berechnen. Sind jedoch a, b, c vielziffrige Zahlen, so wird die logarithmische Rechnung unbequem. Man kann in diesem Falle durch Umformung des Cosinussatzes Formeln erhalten, die für die logarithmische Rechnung geeigneter sind. Es ist

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

d. i.
$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}.$$

Setzt man wieder $a + b + c = 2s$, so wird

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{2s \cdot 2(s-a)}{4bc}, \text{ also}$$

$$2) \quad \begin{cases} \cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} \text{ und nach Analogie} \\ \cos \tfrac{1}{2} \beta = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} \gamma = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}. \end{cases}$$

(Erste Umformung des Cosinussatzes.)

Ebenso ist
$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

d. i.
$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}, \text{ mithin}$$

$$3) \quad \begin{cases} \sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}} \text{ und nach Analogie} \\ \sin \tfrac{1}{2} \beta = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \\ \sin \tfrac{1}{2} \gamma = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{cases}$$

(Zweite Umformung des Cosinussatzes.)

Durch Division d. Formeln 3) durch die entsprechenden Formeln 2) erhält man

$$4) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \beta = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \gamma = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \end{cases}$$

(Dritte Umformung des Cosinussatzes.)

Anmerkung. Die Formeln 2) und 3) kann man auch aus den in § 30, Anmerkung entwickelten Formeln:
$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cos^2 \tfrac{1}{2} \gamma,$$
$$c^2 = (a-b)^2 + 4ab \sin^2 \tfrac{1}{2} \gamma$$

erhalten, wenn man diese Gleichungen nach $\cos \frac{1}{2}\gamma$, bez. $\sin \frac{1}{2}\gamma$ auflöst. Die Formeln 4) kann man auch schreiben

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{\varrho}{s-a} \text{ u. s. w.}$$

Diese Formeln sind also identisch mit dem Inkreissatze.

§ 32. Der Flächeninhalt des Dreiecks und der Radius seines Umkreises.

Da $\sin\gamma = 2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma$ ist, so hat man

$$\sin\gamma = 2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \text{ oder}$$

$$1) \qquad \sin\gamma = \frac{2}{ab} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{2} ab \sin\gamma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

d. i.

$$2) \qquad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \text{ (vgl. § 20.)}$$

Ersetzt man in 1) $\sin\gamma$ durch $\frac{c}{2r}$, so erhält man, wenn man mit den Nennern multipliziert

$$abc = 4r\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

woraus

$$3) \qquad r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{4F}.$$

§ 33. Der Tangentensatz und die Gaussschen Sätze.

Nach dem Sinussatze ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

mithin

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$
$$= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

oder

$$1) \qquad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

(Tangentensatz.)

Ferner erhält man aus

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)},$$

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}.$$

Die beiden Formeln

$$2) \qquad \frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} \gamma},$$

$$3) \qquad \frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} \gamma}$$

heissen die Gaussschen Sätze. Dividiert man 3) durch 2), so erhält man wieder den Tangentensatz.

Dritte Stufe.

(Oberprima.)

§ 34. Hilfswinkel.

Um Ausdrücke, die numerisch zu berechnen sind, für die logarithmische Rechnung möglichst bequem zu machen, sucht man etwa vorkommende Summen und Differenzen zu beseitigen. Gelingt dies nicht, so kann man durch Einführung von Hilfswinkeln die numerische Rechnung abkürzen. Die Buchstaben m und n mögen im Folgenden positive Monome bezeichnen, so dass $\log m$ und $\log n$ sich leicht finden lassen. Kommt dann in einem zu berechnenden Ausdrucke $m + n$ oder $m - n$ vor, so kann man auf folgende Weise verfahren.

$$\text{I.} \quad m + n = m\left(1 + \frac{n}{m}\right).$$

Da die Tangente eines Bogens im ersten Quadranten alle positiven Werte annimmt, so muss es zwischen 0^0 und 90^0 einen Bogen λ von der Beschaffenheit geben, dass $\operatorname{tg}^2 \lambda = \frac{n}{m}$, also

$$1) \qquad \operatorname{tg} \lambda = \sqrt{\frac{n}{m}}$$

ist. Diesen Bogen hat man in der Tafel aufzusuchen. Dann ist

$$m + n = m\,(1 + \operatorname{tg}^2 \lambda) = m\left(1 + \frac{\sin^2 \lambda}{\cos^2 \lambda}\right) = \frac{m\,(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}{\cos^2 \lambda},$$

d. i.

$$2) \qquad m + n = \frac{m}{\cos^2 \lambda}.$$

$$\text{II.} \quad m - n = m\left(1 - \frac{n}{m}\right).$$

Ist die Differenz $m - n$ positiv, so ist $m > n$, $\frac{n}{m} < 1$.

Mithin muss es im ersten Quadranten einen Bogen λ von der Beschaffenheit geben, dass $\sin^2 \lambda = \frac{n}{m}$, also

$$1)\quad \sin \lambda = \sqrt{\frac{n}{m}}$$

ist. Diesen Bogen hat man in der Tafel aufzusuchen.

Dann ist

$$2)\quad m - n = m\,(1 - \sin^2 \lambda) = m \cos^2 \lambda.$$

§ 35. Beispiele für den Gebrauch der Hilfswinkel.

Im Folgenden möge der Gebrauch der Hilfswinkel an einigen häufiger vorkommenden Beispielen erläutert werden.

$$\text{I.}\quad x = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Aufl.

$$x = m \sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Setzt man

$$1)\quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{n}{m},$$

so wird

$$2)\quad x = \frac{m}{\cos \lambda}.$$

II. Die in § 30, Anm. entwickelten Ausdrücke für c werden am besten mit Hilfswinkeln berechnet.

Nimmt man

$$c = (a + b) \sqrt{1 - \frac{4ab \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{(a + b)^2}},$$

und setzt

$$1)\quad \frac{2\sqrt{ab} \cos \frac{1}{2}\gamma}{a + b} = \sin \lambda,$$

so wird

$$2)\quad c = (a + b) \cos \lambda.$$

Nimmt man

$$c = (a - b) \sqrt{1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2}\gamma}{(a - b)^2}},$$

und setzt

$$1)\quad \frac{2\sqrt{ab} \sin \frac{1}{2}\gamma}{ab} = \operatorname{tg} \lambda,$$

so wird

$$2)\quad c = \frac{a - b}{\cos \lambda}.$$

$$\text{III.}\quad x = \frac{m - n}{m + n}.$$

Aufl. $$x = \frac{1 - \frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m}}.$$

Setzt man 1) $\operatorname{tg} \lambda = \sqrt{\frac{n}{m}}$,

so wird 2) $x = \cos 2\lambda$.

IV. $x = m \sin \alpha \pm n \cos \alpha$.

Aufl. $$x = m\left(\sin \alpha \pm \frac{n}{m} \cos \alpha\right).$$

Man setze 1) $\operatorname{tg} \lambda = \frac{n}{m}$,

so wird $$x = m\left(\sin \alpha \pm \frac{\sin \lambda \cos \alpha}{\cos \lambda}\right)$$

oder 2) $$x = \frac{m \sin(\alpha \pm \lambda)}{\cos \lambda}.$$

Ist insbesondere $m = n = 1$, also $x = \sin \alpha \pm \cos \alpha$, so ist $\lambda = 45^0$, $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also

$$x = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm 45^0).$$

V. $x = \sqrt{m + n} \pm \sqrt{m - n}$.

Aufl. $$x = \sqrt{m}\left(\sqrt{1 + \frac{n}{m}} \pm \sqrt{1 - \frac{n}{m}}\right)$$

Man setze 1) $\frac{n}{m} = \cos \lambda$,

so wird

$$x = \sqrt{m}\,(\sqrt{1 + \cos \lambda} \pm \sqrt{1 - \cos \lambda}) = \sqrt{m}\,(\sqrt{2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\lambda} \pm \sqrt{2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda})$$
$$= \sqrt{2m}\,(\cos \tfrac{1}{2}\lambda \pm \sin \tfrac{1}{2}\lambda),$$

mithin unter Berücksichtigung der Schlussbemerkung zum vorigen Beispiel

2) $$x = 2\sqrt{m} \sin(45^0 \pm \tfrac{1}{2}\lambda).$$

§ 36. Trigonometrische Gleichungen.

Wird ein unbekannter Winkel gesucht, so hat dies keine Schwierigkeit, wenn in der betreffenden Bestimmungsgleichung nur eine Funktion dieses Winkels vorkommt. Dann hat man nämlich diese Gleichung algebraisch nach dieser Funktion aufzulösen.

Hat die Bestimmungsgleichung noch nicht diese einfache Form, so muss man sie auf eine solche Form zu bringen suchen. Dies erreicht man meist mit Hilfe der in §§ 27, 28, 29 aufgestellten Formeln. Natürlich wird sich nicht immer eine Gleichung für eine Funktion des gesuchten Winkels selbst ergeben, sondern oft für den doppelten oder den halben Winkel, für die Summe oder die Differenz des gesuchten und eines bekannten Winkels u. s. w.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung und zugleich als Musterbeispiele für ähnliche Aufgaben dienen. Eine häufig vorkommende und deshalb besonders wichtige Gleichung ist

I. $$m \sin \varphi \pm n \cos \varphi = p.$$

Aufl. $$\sin \varphi \pm \frac{n}{m} \cos \varphi = \frac{p}{m}.$$

1) $$\operatorname{tg} \lambda = \frac{n}{m},$$ wonach λ aufzusuchen ist.

$$\sin \varphi \pm \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos \varphi = \frac{p}{m}$$

2) $$\sin (\varphi \pm \lambda) = \frac{p \cos \lambda}{m}.$$

Hat man hiernach $\varphi \pm \lambda$ gefunden, so braucht man nur λ davon zu subtrahieren oder dazu zu addieren, um φ zu erhalten.

[Die Substitution $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ würde auf eine in $\sin \varphi$ algebraische Gleichung führen, die aber vom zweiten Grade ist; auch ist bei unserer Methode für $\varphi + \lambda$ ausser dem aus der Tafel zu entnehmenden Winkel des ersten Quadranten dessen Supplementwinkel zu berücksichtigen, welcher der zweiten Lösung der quadratischen Gleichung entspricht.]

II. Wenn ein Winkel eines Dreiecks bekannt ist, so ist auch die Summe der beiden andern gegeben, und man muss, um diese Winkel selbst zu finden, ihre Differenz dazu suchen; ist umgekehrt die Differenz zweier Winkel gegeben, so kann man alle Winkel angeben, wenn man zunächst ihre Summe und durch sie den dritten Winkel sucht. Im Folgenden seien α, β, γ die drei Winkel eines Dreiecks und es werde zur Abkürzung $\alpha - \beta = \delta$ gesetzt. Es sei entweder γ oder δ gegeben und es bestehe ausserdem zwischen α und β eine der vier Gleichungen

1. $\sin \alpha + \sin \beta = m,$
2. $\sin \alpha - \sin \beta = m,$
3. $\sin \alpha \cdot \sin \beta = m,$
4. $\dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta} = m,$

so soll gezeigt werden, wie in jedem Falle der nicht gegebene Winkel gefunden werden kann.

1) Es ist
$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = m,$$
$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma \cdot \cos \tfrac{1}{2}\delta = \tfrac{1}{2} m.$$

2) Es ist
$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = m,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\delta \cdot \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2} m.$$

3) Aus
$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta),$$
$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$$
ergiebt sich durch Subtraktion
$$2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$
mithin ist
$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2m,$$
$$\cos\delta + \cos\gamma = 2m.$$

4) Es ist
$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{m-1}{m+1},$$
$$\frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}{2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{m-1}{m+1},$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{m-1}{m+1},$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{m-1}{m+1}.$$

§ 37. Allgemeine Regeln für die Berechnung des Dreiecks aus irgend drei Stücken.

Wie in der Planimetrie sich an die Grundaufgaben der Dreieckskonstruktionslehre Aufgaben anschliessen, in denen Dreiecke aus irgendwelchen drei Stücken, durch die sie bestimmt sind, konstruiert werden sollen, so ergiebt sich für die Trigonometrie die entsprechende Aufgabe, ein Dreieck aus irgend drei Stücken, durch welche es bestimmt ist, zu berechnen. Zur Lösung dieser Aufgabe können verschiedene Wege eingeschlagen werden.

I. Zunächst kann man in vielen Fällen der planimetrischen Konstruktion durch die trigonometrische Rechnung folgen. Diese Methode ist jedoch oft unanwendbar, z. B. stets, wenn für die planimetrische Konstruktion sich kein nach einer Grundaufgabe konstruierbares Dreieck vorfindet, wenn also fehlende Punkte durch geometrische Örter gesucht werden müssen. Aber auch sonst ist diese Methode oft schwerfällig und wird mit Vorteil meist nur bei ganz einfachen Aufgaben angewandt.

II. Die zweite Methode besteht darin, dass man für die gesuchten Grössen Unbekannte einführt und so viel Gleichungen aufstellt, als Unbekannte vorhanden sind. Diese Gleichungen sind alsdann in Bezug auf die eingeführten

Unbekannten aufzulösen, wobei zur Erreichung einer möglichst einfachen Gestalt die §§ 27 bis 29, sowie zur bequemen numerischen Ausrechnung die §§ 34 bis 36 in mannigfacher Weise Verwendung finden.

Zur Aufstellung der erforderlichen Gleichungen müssen natürlich diejenigen Linien, welche in den gegebenen Stücken vorkommen, in der Figur gezeichnet werden, sonst aber keine Hilfslinien. Ist z. B. $h_a + h_b$ gegeben, so wird man zwar die Höhen h_a und h_b ziehen, nicht aber, wie zum Aufsuchen einer planimetrischen Lösung, eine Strecke gleich der Summe beider herstellen. Oft kann man in verschiedener Weise Gleichungen ansetzen; namentlich hat man oft die Wahl, ob man zuerst die Seiten oder die Winkel des Dreiecks berechnen will.

§ 38. Berechnung der Dreiecke, die der Gestalt nach bestimmt sind.

Ein Dreieck ist der Gestalt nach bestimmt, wenn von ihm entweder zwei Winkel, oder ein Verhältnis und ein Winkel, oder zwei Verhältnisse gegeben sind. Die beiden letzten Fälle müssen sich daher stets auf den ersten zurückführen lassen, d. h. es müssen sich in ihnen stets Gleichungen zur Bestimmung der Winkel ergeben, so dass wir uns auf die Aufgabe beschränken können, ein Dreieck zu berechnen aus den Winkeln und einer Strecke.

I. Das Nächstliegende ist hier, dass man die zu suchenden Seiten durch die gegebene Strecke ausdrückt. Sind z. B. ϱ, α, β (mithin auch γ) gegeben, so ergiebt sich, wenn O der Mittelpunkt des Inkreises und $OD \perp AB$ ist,

$$BD = \varrho \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \beta, \quad AD = \varrho \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \alpha,$$

mithin

$$c = \varrho (\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \beta + \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \alpha) = \varrho \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta + \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}$$

$$= \frac{\varrho \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{\varrho \cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}$$

und nach Analogie

$$a = \frac{\varrho \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma}, \quad b = \frac{\varrho \cos \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \gamma},$$

wonach a, b, c zu berechnen sind.

II. Oft ist es indessen zweckmässig, die gesuchten Grössen (in unserm Falle also die Seiten) nicht direkt durch das gegebene Stück auszudrücken, sondern beide, das gesuchte und das gegebene Stück, durch dieselbe Hilfsgrösse, wodurch dann 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten entstehen, aus denen man die Hilfsgrösse eliminieren kann. Als solche Hilfsgrösse ist besonders der Radius des Umkreises, r, geeignet, mit welchen die Seiten durch die Gleichungen

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma$$

verbunden sind. Statt r zu eliminieren kann man auch $\log 2r$ aufsuchen und für die weitere Rechnung verwenden.

Ist z. B. F, α, β gegeben, so ist

$$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad (\S\ 24),$$

woraus sich

$$2r = \sqrt{\frac{2F}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}}$$

ergiebt. Hat man hieraus $\log 2r$ bestimmt, so sucht man die Seiten nach den Gleichungen

$$a = 2r \sin\alpha, \quad b = 2r \sin\beta, \quad c = 2r \sin\gamma.$$

Um sich dieser Methode mit Vorteil bedienen zu können, muss man im stande sein, die bei der Berechnung der Dreiecke vorkommenden Stücke durch r und die Winkel auszudrücken.

§ 39. Berechnung der Dreiecke, von denen ein Winkel gegeben ist oder gefunden werden kann.

I. Aufgaben, in denen ein Winkel gegeben ist, lassen sich oft auf verschiedene Arten behandeln. Indessen giebt es eine Methode, die, wenn auch nicht immer auf dem kürzesten Wege, so doch sicher zum Ziele führt. Diese Methode besteht darin, dass man zuerst die Winkel des Dreiecks bestimmt, und zwar dadurch, dass man zu dem gegebenen Winkel einen zweiten hinzusucht. Ist insbesondere γ gegeben, so wird man meist $\alpha - \beta$ finden können und umgekehrt; ist α gegeben, so wird sich meist β finden lassen und umgekehrt. Die Gleichungen zur Bestimmung des fehlenden Winkels erhält man, wenn man die gegebenen Längen durch r und die Winkel ausdrückt und aus den erhaltenen Gleichungen r eliminiert. Sind die Winkel gefunden, so ist die Aufgabe auf den vorigen Paragraphen zurückgeführt. Oft ist es auch zweckmässig, statt der Winkel zuerst die Seiten zu suchen.

II. Befindet sich unter den gegebenen Stücken kein Winkel, so lässt sich oft aus zwei von ihnen ein Winkel finden, worauf dann nach I weiter zu verfahren ist.

§ 40. Berechnung der Dreiecke, bei denen kein Winkel gegeben ist oder aus zwei Stücken gefunden werden kann.

Ist kein Winkel gegeben und lässt sich auch auf einfache Weise aus den gegebenen Stücken kein Winkel finden, so kann man die gegebenen Stücke durch dieselben drei von einander unabhängigen Hilfsgrössen ausdrücken, wodurch man für diese drei Bestimmungsgleichungen erhält. Natürlich können die Hilfsgrössen ganz oder z. T. mit den gegebenen Stücken identisch sein. In vielen Fällen wird es sich auch hier empfehlen, r, γ und δ als Hilfsgrössen einzuführen.

Druck von Hesse & Becker in Leipzig

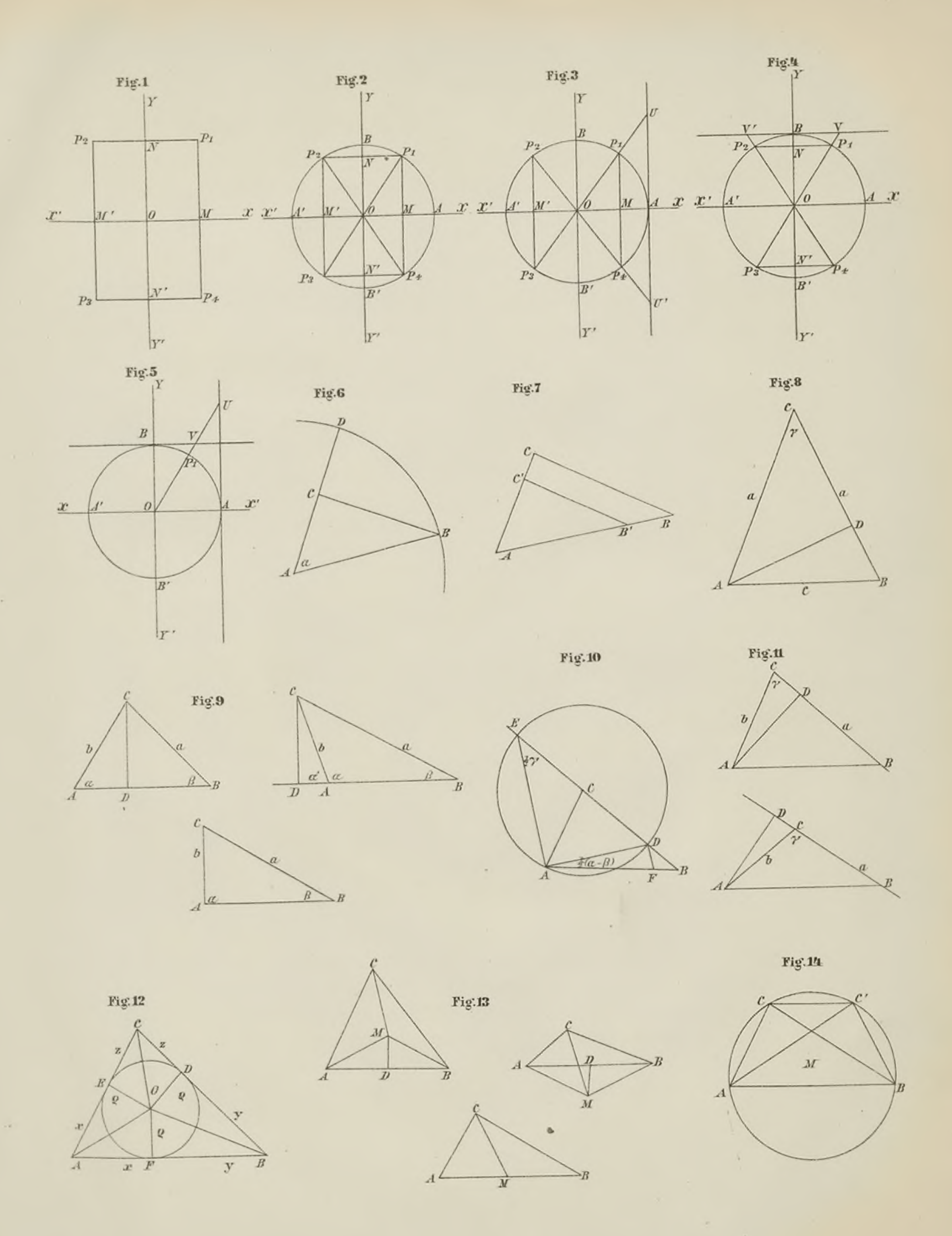


Fig.1
Fig.2
Fig.3
Fig.4
Fig.5
Fig.6
Fig.7
Fig.8
Fig.9
Fig.10
Fig.11
Fig.12
Fig.13
Fig.14

